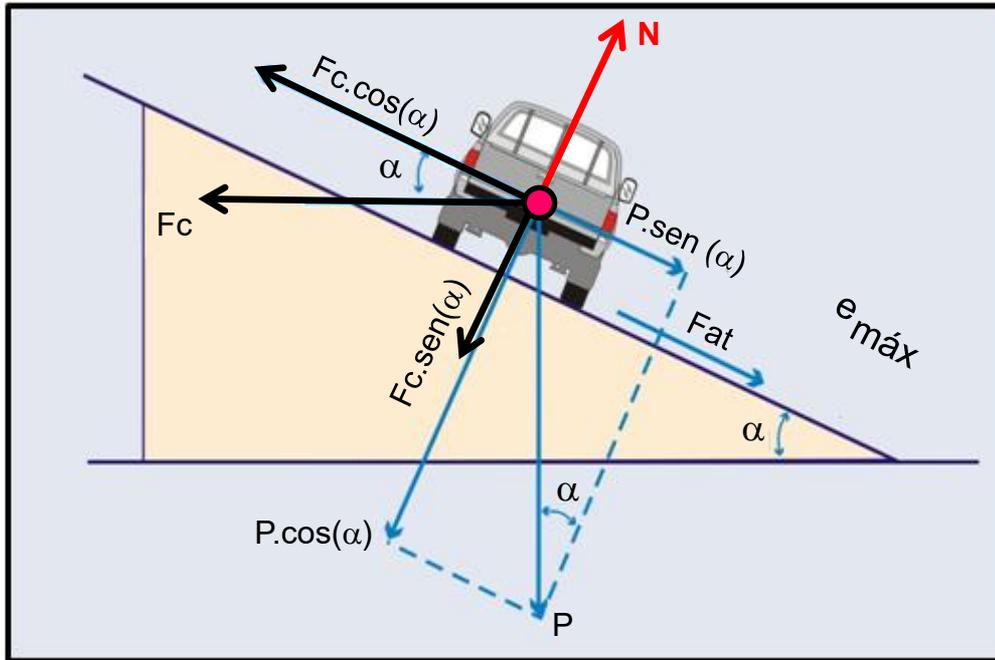


# Projeto Geométrico Horizontal

## Aula 4



$R_{mín} = \text{Raio Mínimo}$



Equilíbrio em x:

$$F_c \cdot \cos \alpha = P \cdot \sin \alpha + F_a$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha + N \cdot f_t$$

Onde:

$$N = P \cdot \cos \alpha + F_c \cdot \sin \alpha$$

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

$$F_a = N \cdot f_t$$

$$P = m \cdot g$$

$R_{\text{mín}} = \text{Raio Mínimo}$

**Para:**

$$\alpha \downarrow \downarrow \Rightarrow \cos \alpha \approx 1 \text{ e } \sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \cdot \text{tg } \alpha + f_t \cdot m \cdot g + f_t \cdot \frac{m \cdot v^2}{R} \cdot \text{tg } \alpha$$

$$v^2 = R \cdot g \cdot \text{tg } \alpha + f_t \cdot g \cdot R + f_t \cdot v^2 \cdot \text{tg } \alpha$$

$$v^2 - f_t \cdot v^2 \cdot \text{tg } \alpha = R \cdot g \cdot (\text{tg } \alpha + f_t)$$

$$\frac{v^2 \cdot (1 - f_t \cdot \text{tg } \alpha)}{R \cdot g} = \text{tg } \alpha + f_t$$

**Como:**

$$e = \text{tg } \alpha = \text{superelevação}$$

**Para:**  $f_t \downarrow \downarrow \downarrow$  e  $e \downarrow \downarrow \downarrow \Rightarrow f_t \cdot \text{tg } \alpha \approx 0$

$$R \cdot g = \frac{v^2}{e + f_t} \Rightarrow R = \frac{v^2}{g \cdot (e + f_t)}$$

**Para:**  $V$  (km/h) e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

$$R = \frac{(v/3,6)^2}{9,8 \cdot (e + f_t)}$$

$$R = \frac{V_p^2}{127 \cdot (e + f_t)}$$

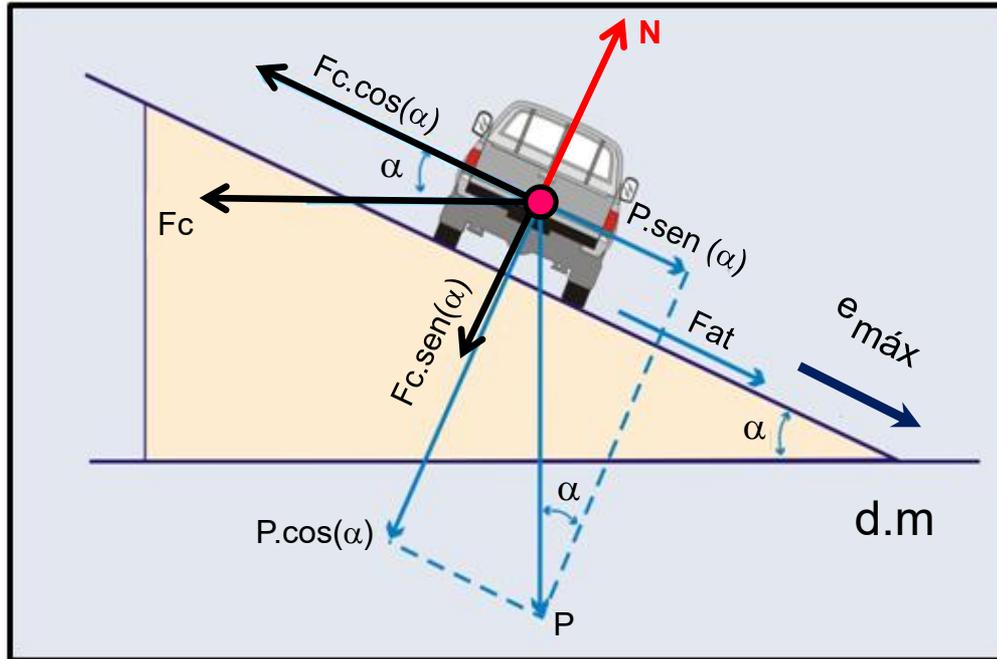
$R_{mín}$  = Raio Mínimo

**Para:  $e_{max}$  e  $f_{t,max} \Rightarrow R_{min}$**



$$R_{min} = \frac{v_p^2}{127 \cdot (e_{max} + f_{t,max})}$$

# Estabilidade de Veículos em Curvas Horizontais Superelevadas



Superelevação excessivamente alta: deslizamento do veículo para o interior da curva ou mesmo tombamento de veículos que percorram a curva com velocidades muito baixas ou parem sobre a curva por qualquer motivo. Os valores máximos adotados para a superelevação no projeto de curvas horizontais (AASHTO, 1994) são determinados em função dos seguintes fatores:

- condições climáticas (chuvas, gelo ou neve)
- condições topográficas do local
- tipo de área: rural ou urbana
- frequência de tráfego lento no trecho considerado

$$\mu = 0,19 - \frac{V}{1600}$$

V= Velocidade Diretriz (km/h)

$\mu$ = Coeficiente de atrito

$$R_{mín} = \frac{V^2}{127x(\mu_{m\acute{a}x} + e_{m\acute{a}x})}$$

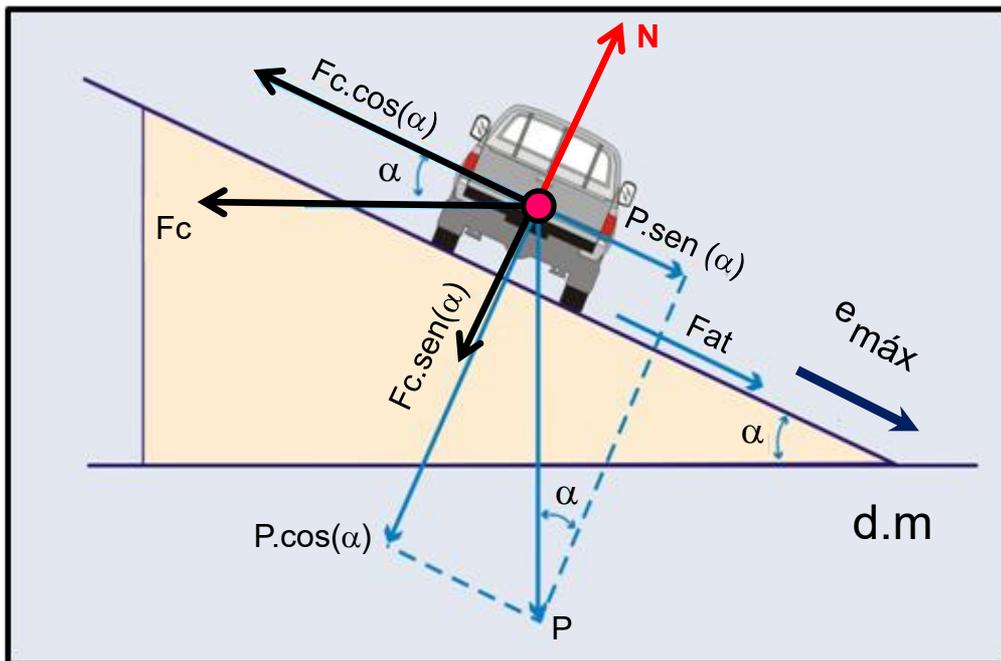
V= Velocidade Diretriz (km/h)

$\mu$ = Coeficiente de atrito máximo

e = Elevação Máxima

$R_{mín}$  = Raio Mínimo

# Coeficiente de Atrito Transversal



$$\mu = 0,19 - \frac{V}{1600}$$

V= Velocidade Diretriz (km/h)

$\mu$ = Coeficiente de atrito

Velocidade diretriz (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Coeficiente de atrito transversal $f_{\text{max}}$	0,20	0,18	0,16	0,15	0,15	0,14	0,14	0,13	0,12	0,11

## Superelevações Máximas comumente adotadas conforme Manual de Projeto Geométrico do DNIT

A consideração conjunta das condicionantes acima referidas conduz aos valores práticos recomendados para a taxa máxima admissível de superelevação, mencionados a seguir:

$e_{\max}=12\%$  - A taxa máxima prática admissível para a superelevação de projetos rodoviários é de 12%. Seu emprego deve ser limitado aos casos de melhorias e correção de situações perigosas existentes sem alteração dos raios em planta (por economia ou impossibilidade). Deverá ser verificada a incidência de veículos lentos, já que para esses, o aumento da superelevação será contra-indicada. No caso de projetos novos deve-se procurar aumentar os raios e não a superelevação. Para duplicação com aproveitamento de pista existente sem alterações, cada sentido pode ser atendido separadamente, se necessário.

$e_{\max}=10\%$  - Próprio para rodovias de padrão elevado, onde as condições topográficas, geométricas e de atrito lateral e os volumes de tráfego favoreçam elevadas velocidades e fluxo ininterrupto. Adotar para rodovias de Classe 0 em geral e Classe I em regiões planas e onduladas.

$e_{\max}=8\%$  - Em projetos de rodovias de padrão intermediário ou de rodovias de elevado padrão sujeitas a fatores (geralmente topográficos) que reduzam a velocidade média. Adotar para Classe I em região montanhosa e rodovias das demais classes de projeto em geral.

$e_{\max}=6\%$  - Em projetos condicionados por urbanização adjacente e freqüentes interseções, que provocam redução da velocidade média.

$e_{\max}=4\%$  - Em situações extremas, com intensa ocupação do solo adjacente e reduzida flexibilidade para variar as declividades transversais da pista, sem vias marginais.

Cabe salientar que a superelevação máxima deverá ser de preferência mantida para um trecho inteiro. O valor adotado servirá de base para a determinação das taxas de superelevação para-raios superiores ao mínimo.

# Estabilidade de Veículos em Curvas Horizontais Superelevadas

Superelevações Máximas comumente adotadas conforme Manual de Projeto Geométrico do DNIT

<b>Velocidade diretriz (km/h)</b> <b><math>e_{\max}(\%)</math></b>	<b>30</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>60</b>	<b>70</b>	<b>80</b>	<b>90</b>	<b>100</b>	<b>110</b>	<b>120</b>
<b>4</b>	30	60	100	150	205	280	355	465	595	755
<b>6</b>	25	55	90	135	185	250	320	415	530	665
<b>8</b>	25	50	80	125	170	230	290	375	475	595
<b>10</b>	25	45	75	115	155	210	265	345	435	540
<b>12</b>	20	45	70	105	145	195	245	315	400	490

# Estabilidade de Veículos em Curvas Horizontais Superelevadas

DESCRIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS	Unidade	CLASSE 0			CLASSE I			CLASSE II		
		Plano	Ondul.	Mont.	Plano	Ondul.	Mont.	Plano	Ondul.	Mont.
Velocidade diretriz mínima	km/h	120	100	80	100	80	60	100	70	50
Distância de visibilid. de parada: – mínimo desejável	m	310	210	140	210	140	85	210	110	65
	– mínimo absoluto	m	205	155	110	155	110	75	155	90
Distância mínima de visibilidade de ultrapassagem	m	–	–	–	680 <sup>(1B)</sup>	560 <sup>(1B)</sup>	420 <sup>(1B)</sup>	680	490	350
Raio mínimo de curva horizontal (p/superelev. máx.)	m	540	345	210	345	210	115 <sup>(1)</sup>	375	170	80
Taxa de superelevação máxima	%	10	10	10	10	10	10 <sup>(2)</sup>	8	8	8
Rampa máxima	%	3	4	5	3	4½	6	3	5	7
Valor K para curvas convexas: – mínimo desejável	m/%	233	107	48	107	48	18	107	29	10
	– mínimo absoluto	m/%	102	58	29	58	29	14	58	20
Valor K para curvas côncavas: – mínimo desejável	m/%	80	52	32	52	32	17	52	24	12
	– mínimo absoluto	m/%	50	36	24	36	24	15	36	19
Largura da faixa de trânsito	m	3,60	3,60	3,60	3,60	3,60	3,60	3,60	3,50	3,30
Largura do acostamento externo: – mínimo desejável	m	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	– mínimo absoluto	m	3,50	3,00 <sup>(3)</sup>	3,00 <sup>(3)</sup>	3,00 <sup>(3)</sup>	2,50	2,50	2,50	2,50
Largura do acostamento interno: – pistas de 2 faixas	m	0,60-1,20	0,60-1,00	0,50-0,60	Somente para a classe IA.			–	–	–
	– pistas de 3 faixas	m	2,50-3,00	2,00-2,50	Aplicam-se os mesmos valores indicados para a classe 0.			–	–	–
	– pistas de 4 faixas	m	3,00	2,50-3,00	2,50-3,00				–	–
Gabarito vertical (altura livre): – mínimo desejável	m	–	–	–	–	–	–	5,50	5,50	5,50
	– mínimo absoluto	m	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	4,50	4,50	4,50
Afast. mín. borda do acost.: – obstáculos contínuos	m	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
	– obstáculos isolados	m	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
Largura do canteiro central: – largura desejável	m	10 – 18	10 – 18	10 – 18	10 – 12	10 – 12	10 – 12	–	–	–
	– valor normal	m	6 – 7	6 – 7	6 – 7	≥ 6	≥ 6	≥ 6	–	–
	– mínimo absoluto	m	3 – 7	3 – 7	3 – 7	3 – 7	3 – 7	3 – 7	–	–

Observações: <sup>(1)</sup> Somente para a classe IA; para a classe IB, considerar 125 m. <sup>(2)</sup> Somente para a classe IA; para a classe IB, considerar 6%.

<sup>(3)</sup> Preferivelmente 3,50 m quando for previsto volume horário unidirecional de caminhões superior a 250 vph (DNER, 1999, p. 144).

Fonte dos dados primários: Manual de projeto geométrico de rodovias rurais (DNER, 1999, p. 161-168).

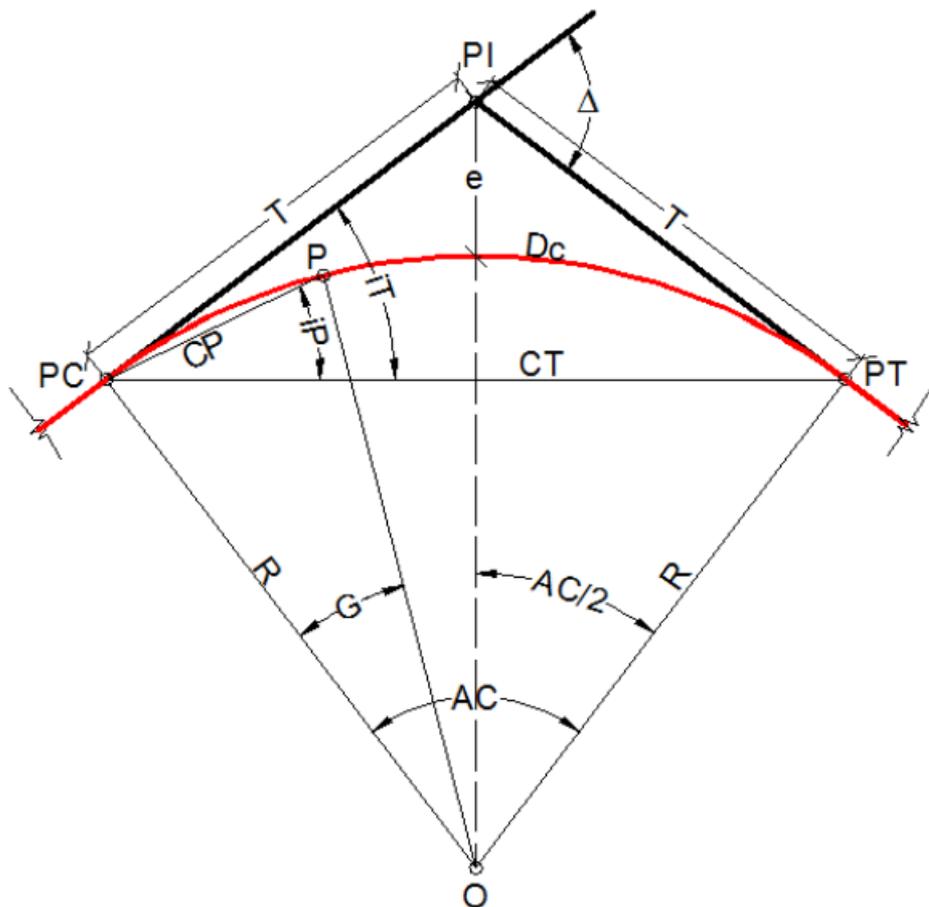
# Estabilidade de Veículos em Curvas Horizontais Superelevadas

DESCRIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS	Unidade	CLASSE III			CLASSE IV A			CLASSE IV B		
		Plano	Ondul.	Mont.	Plano	Ondul.	Mont.	Plano	Ondul.	Mont.
Velocidade diretriz mínima	km/h	80	60	40	60	40	30	60	40	30
Distância de visibilidade de parada: – mínimo desejável – mínimo absoluto	m	140	85	45	85	45	30	85	45	30
	m	110	75	45	75	45	30	75	45	30
Distância mínima de visibilidade de ultrapassagem	m	560	420	270	420	270	180	420	270	180
Raio mínimo de curva horizontal (p/superelev. máx.)	m	230	125	50	125	50	25	125	50	25
Taxa de superelevação máxima	%	8	8	8	8	8	8	8	8	8
Rampa máxima	%	4	6	8	4	6	8	6	8	10 <sup>(1)</sup>
Valor K para curvas convexas: – mínimo desejável – mínimo absoluto	m/%	48	18	5	18	5	2	18	5	2
	m/%	29	14	5	14	5	2	14	5	2
Valor K para curvas côncavas: – mínimo desejável – mínimo absoluto	m/%	32	17	7	17	7	4	17	7	4
	m/%	24	15	7	15	7	4	15	7	4
Largura da faixa de trânsito	m	3,50	3,30	3,30	3,00	3,00	3,00	2,50	2,50	2,50
Largura do acostamento externo	m	2,50	2,00	1,50	1,30	1,30	0,80	1,00	1,00	0,50
Gabarito vertical (altura livre): – mínimo desejável – mínimo absoluto	m	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50
	m	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
Afastam. mín. borda do acost.: – obstáculos contínuos – obstáculos isolados	m	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
	m	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50

Observação: <sup>(1)</sup> Em extensão limitada a 300 m contínuos.

Fonte dos dados primários: Manual de projeto geométrico de rodovias rurais (DNER, 1999, p. 161-168).

## Curvas de Concordância Horizontal Simples



PI → Ponto de interseção das tangentes;

PC → Ponto de Concordância horizontal;

PT → Ponto de Tangência;

T → Tangente Externa;

R → Raio da curva circular;

AC → Ângulo central da curva;

O → Centro da curva;

Δ → Ângulo de deflexão das tangentes;

Dc → Desenvolvimento da curva;

e → Afastamento ou flecha;

iT → Ângulo de deflexão total;

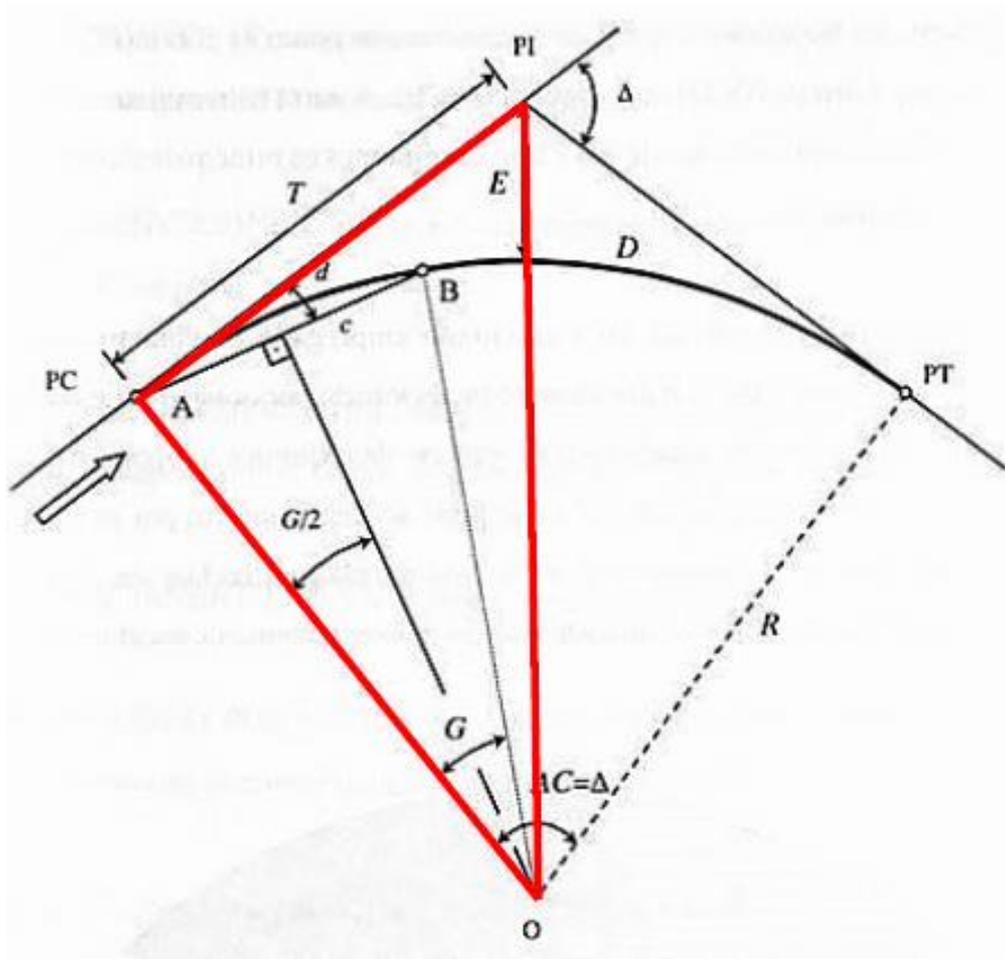
iP → Ângulo de deflexão parcial;

CP → Corda Parcial;

P → Ponto qualquer na curva;

G → Grau da curva para corda parcial.

## Curvas de Concordância Horizontal Simples



No triângulo O-PC-PI:

$$\frac{T}{R} = \operatorname{tg} \frac{AC}{2} \Rightarrow T = R \cdot \operatorname{tg} \frac{AC}{2}$$

$$\frac{D}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{AC}{360} \Rightarrow D = \frac{\pi \cdot R \cdot AC}{180}$$

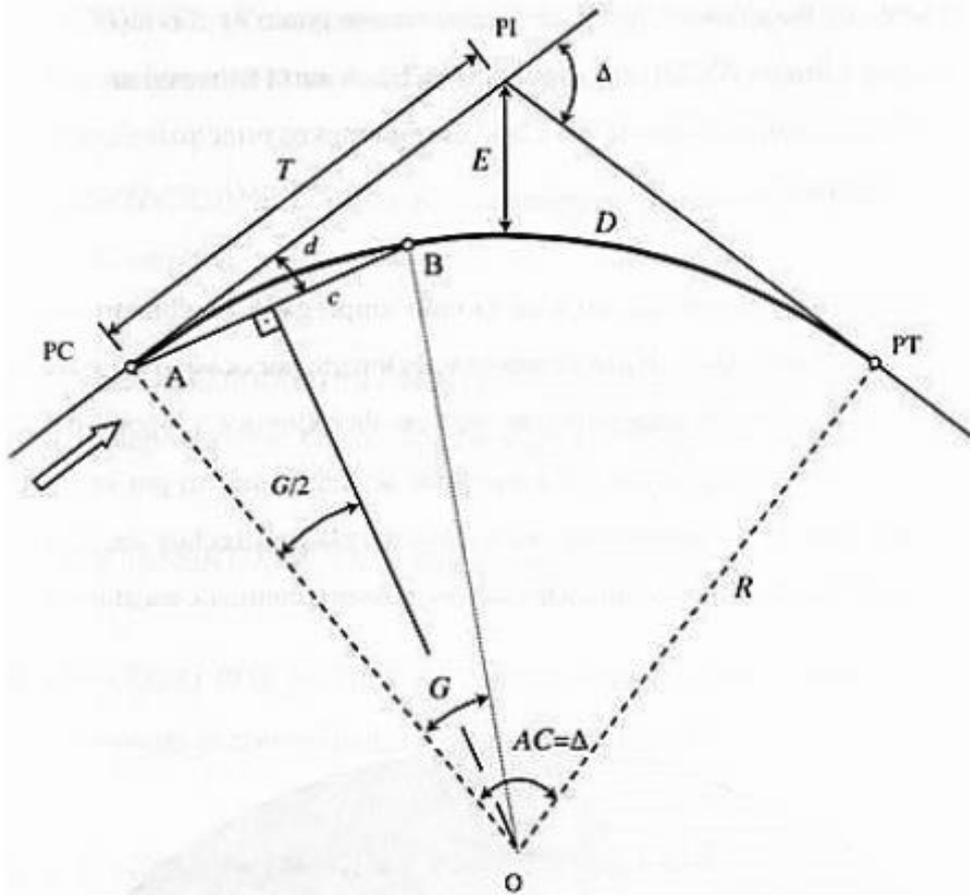
(para AC em graus)

Ou:

$$D = R \cdot AC$$

(para AC em radianos)

## Curvas de Concordância Horizontal Simples



No elemento O-A-B:

$$\frac{\widehat{AB}}{G} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{360} \Rightarrow G = \frac{180 \cdot \widehat{AB}}{\pi \cdot R}$$

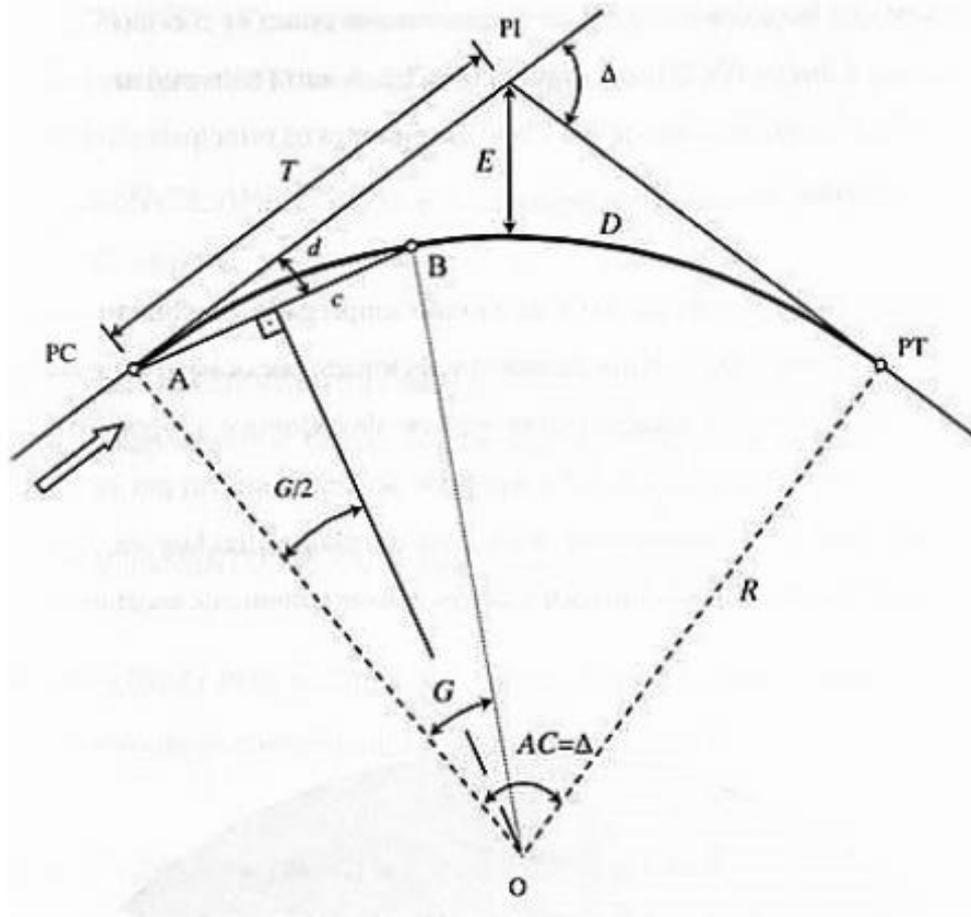
(para G em graus)

Quando  $R \uparrow \Rightarrow \widehat{AB} \approx$  corda

p/ corda de 20 m:

$$G_{20} = \frac{180 \cdot 20}{\pi \cdot R} = \frac{1145,92}{R}$$

## Curvas de Concordância Horizontal Simples



No elemento O-A-B:

$$(90^\circ - d) + 90^\circ + G/2 = 180^\circ$$

$$\therefore d = \frac{G}{2}$$

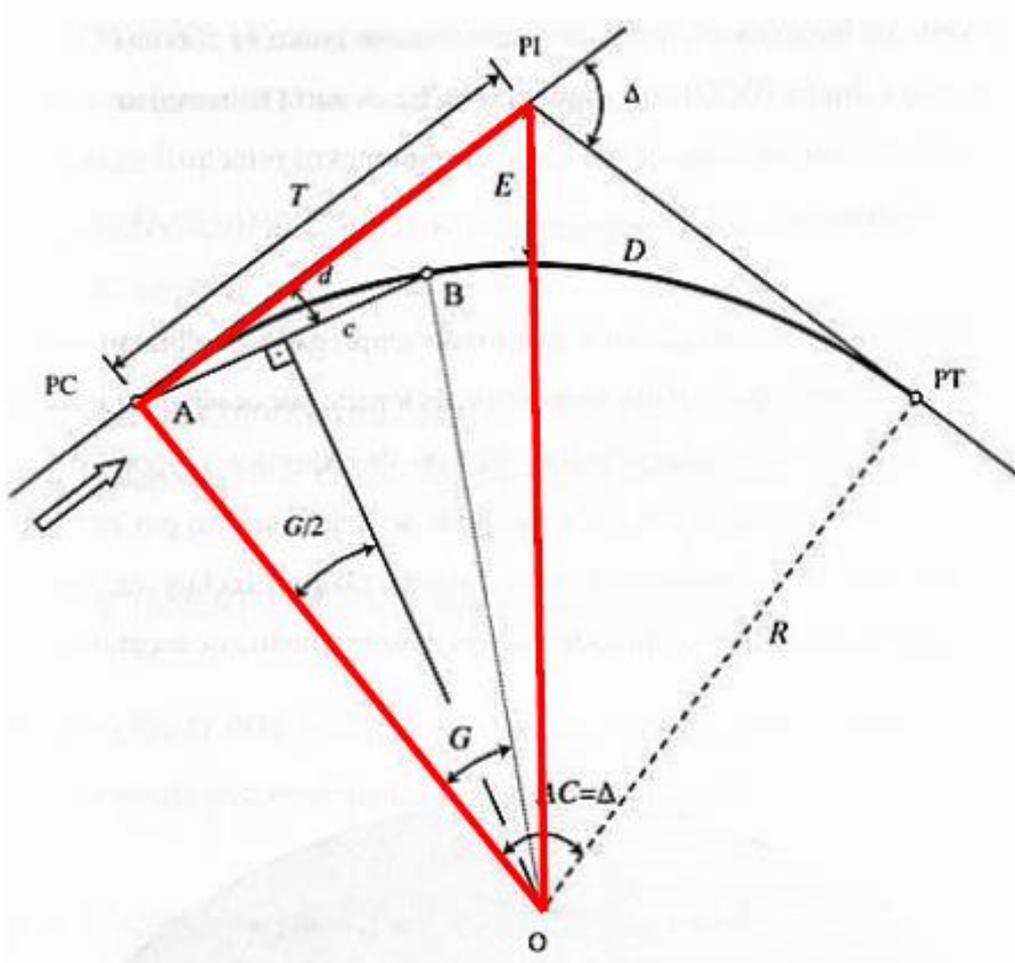
$$d_{20} = \frac{G_{20}}{2} = \frac{1145,92}{2 \cdot R}$$

Deflexão por metro:

$$d_m = \frac{d}{c} = \frac{G}{2 \cdot c}$$

$$p/c = 20 \text{ m: } d_m = \frac{d_{20}}{20} = \frac{G_{20}}{40}$$

## Curvas de Concordância Horizontal Simples



No triângulo O-PC-PI:

$$\cos \frac{AC}{2} = \frac{R}{R + E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = R \cdot \left( \sec \frac{AC}{2} - 1 \right)$$

Ou:

$$E = T \cdot \operatorname{tg} \frac{AC}{4}$$

# Curvas Horizontal Circular

$$D = \frac{\pi \cdot R \cdot \Delta}{180^0} \left\{ \begin{array}{l} R = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ \Delta = \text{Deflexão da tangente (graus)} \\ D = \text{Desenvolvimento da curva (m)} \end{array} \right.$$

$$E = R \cdot \left[ \sec \left( \frac{\Delta}{2} \right) - 1 \right] \left\{ \begin{array}{l} R = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ \Delta = \text{Deflexão da tangente (graus)} \\ E = \text{Distância do PI a Circular da Curva ou Afastamento (m)} \end{array} \right.$$

$$T = R \cdot \tan \left( \frac{\Delta}{2} \right) \left\{ \begin{array}{l} R = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ \Delta = \text{Deflexão da tangente (graus)} \\ T = \text{Tangente Externa (m)} \end{array} \right.$$

$$G = \frac{180^0 \cdot c}{\pi \cdot R} \left\{ \begin{array}{l} R = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ c = \text{Corda} \\ G = \text{Grau da Curva (m)} \end{array} \right.$$

# Curvas Horizontal Circular

## Grau da curva para corda de 20m

Quando se faz a substituição do comprimento do arco de uma curva pela sua respectiva corda se comete um erro, cuja grandeza passa a ser mais significativa à medida que se aumenta o comprimento da corda.

Se adotarmos valores para a corda teremos erros inferiores a  $0,01m$ , considerado desprezível.

Comprimento da Corda	Intervalo do Raio
20m	$R \geq 180m$
10m	$65m \leq R < 180m$
5m	$25m \leq R < 65m$
2m	$R < 25m$

$$G_{20} = \frac{1.145,92}{R} \left\{ \begin{array}{l} R = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ G_{20} = \text{Grau da Curva para corda de 20m (graus)} \end{array} \right.$$

# Curvas Horizontal Circular

$$d = \frac{G}{2} \left\{ \begin{array}{l} d = \text{Deflexão sobre a tangente (graus)} \\ G = \text{Grau da Curva (graus)} \end{array} \right.$$

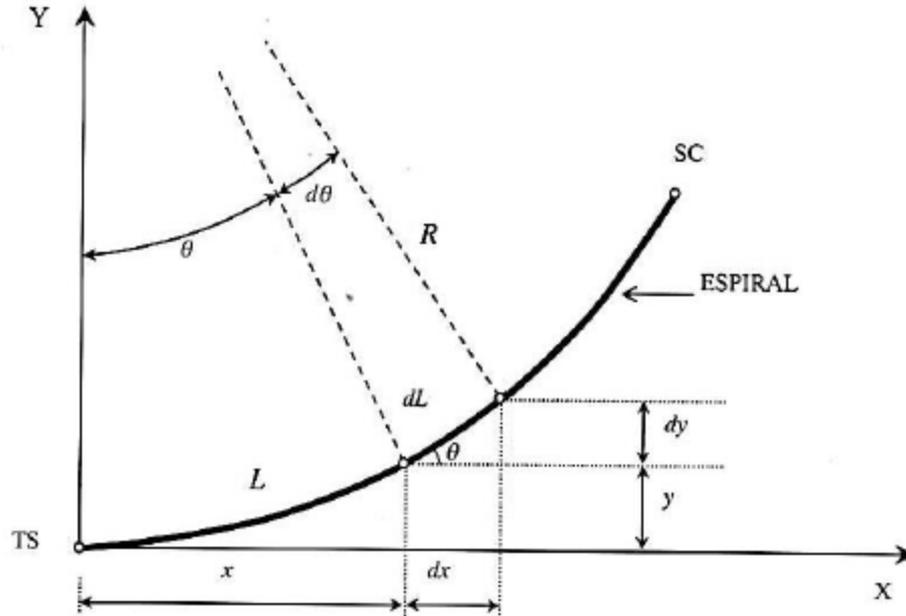
$$d_m = \frac{G}{2 \cdot c} \left\{ \begin{array}{l} d_m = \text{Deflexão por metro (graus)} \\ G = \text{Grau da Curva (graus)} \\ c = \text{Corda} \end{array} \right.$$





# Elementos Planimétricos de uma Estrada

## Curvas de Concordância Horizontal de Transição



$$dL = R \cdot d\theta$$

$$d\theta = \frac{dL}{R} = \frac{dL}{K/L} = \frac{L \cdot dL}{K}$$

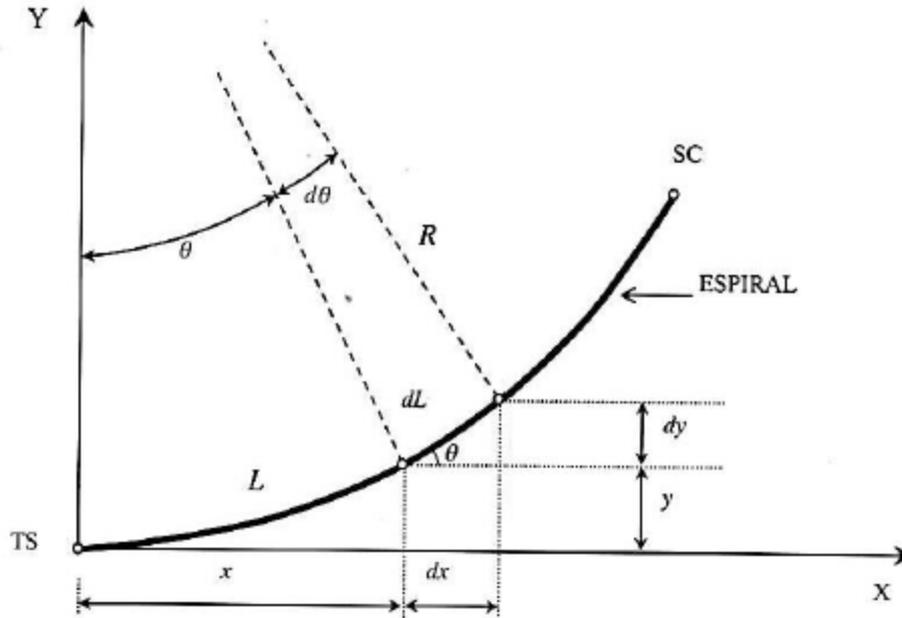
$$\int d\theta = \int \frac{L \cdot dL}{K}$$

$$\theta = \frac{L^2}{2 \cdot K}$$

$$\theta = \frac{L^2}{2 \cdot R_c \cdot L_s}$$

# Elementos Planimétricos de uma Estrada

## Curvas de Concordância Horizontal de Transição



$$\cos\theta = \frac{dx}{dL}$$

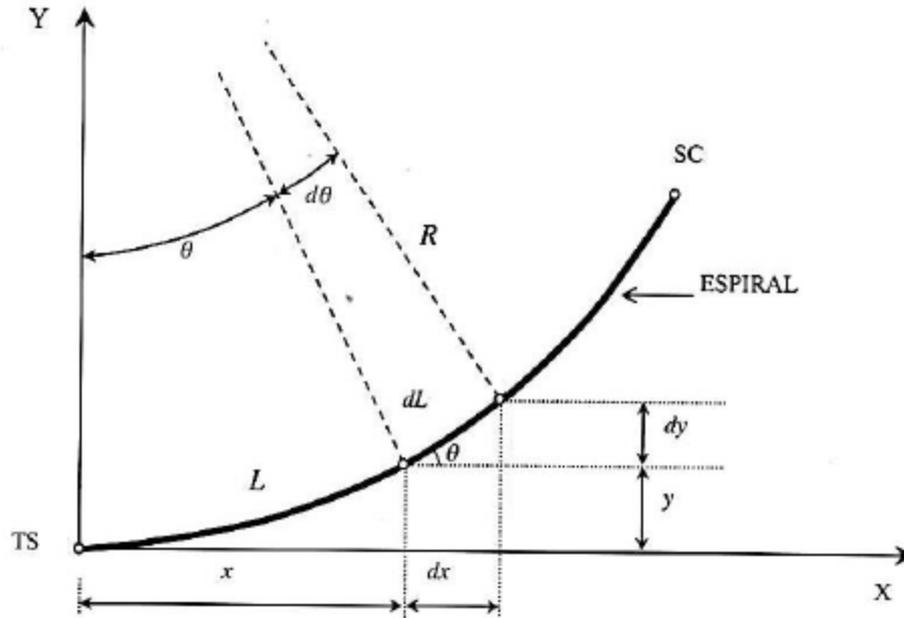
$$dx = dL \cdot \cos\theta$$

Desenvolvendo  $\cos\theta$  em série de potências e integrando....:

$$X = L \cdot \left( 1 - \frac{\theta^2}{10} + \frac{\theta^4}{216} - \dots \right)$$

# Elementos Planimétricos de uma Estrada

## Curvas de Concordância Horizontal de Transição



$$\text{sen}\theta = \frac{dy}{dL}$$

$$dy = dL \cdot \text{sen}\theta$$

Desenvolvendo  $\text{sen}\theta$  em série de potências e integrando...:

$$Y = L \cdot \left( \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{42} + \dots \right)$$

## Curvas de Concordância Horizontal de Transição

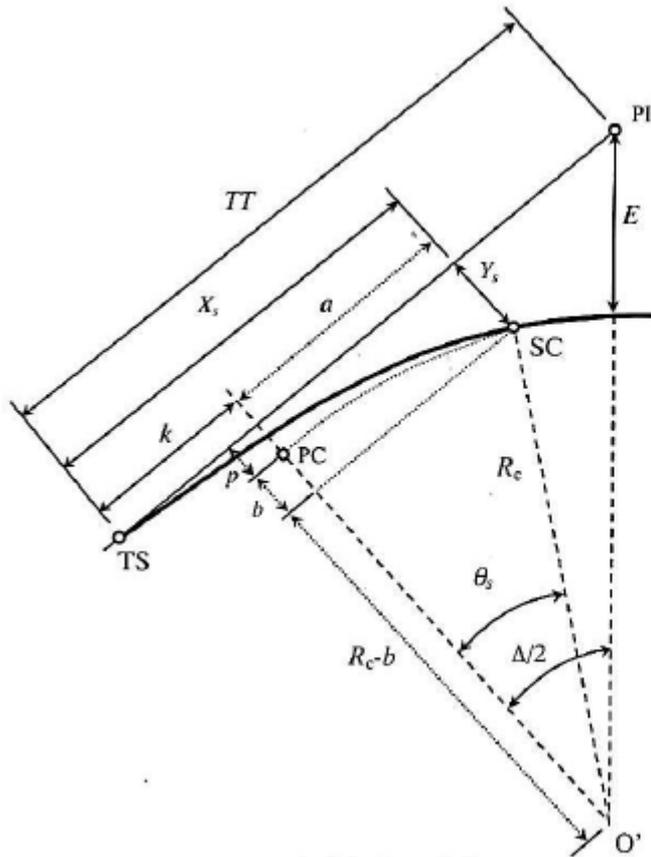
$$\theta_s = \frac{L_s}{2 \cdot R_c} \quad [\text{radianos}]$$

$$X_s = L_s \cdot \left( 1 - \frac{\theta_s^2}{10} + \frac{\theta_s^4}{216} - \dots \right) \quad [\text{m}]$$

$$Y_s = L_s \cdot \left( \frac{\theta_s}{3} - \frac{\theta_s^3}{42} + \dots \right) \quad [\text{m}]$$

# Elementos Planimétricos de uma Estrada

## Curvas de Concordância Horizontal de Transição



Elementos adicionais:

$$k = X_s - R_c \cdot \text{sen}\theta_s \quad [\text{m}]$$

$$p = Y_s - R_c \cdot (1 - \text{cos}\theta_s) \quad [\text{m}]$$

$$TT = k + (R_c + p) \cdot \text{tg}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \quad [\text{m}]$$

$$E = \frac{R_c + p}{\text{cos}(\Delta/2)} - R_c \quad [\text{m}]$$

## Curvas de Concordância Horizontal de Transição

Ângulo central:

$$AC = \theta_c + 2. \theta_s \Rightarrow \theta_c = AC - 2. \theta_s$$

Comprimento do trecho circular:

$$L_c = R_c \cdot \theta_c \Rightarrow L_c = R_c \cdot \theta_c \cdot \frac{\pi}{180}$$

[rad]                      [graus]

Desenvolvimento total da concordância:

$$D = L_c + 2. L_s \quad [m]$$

# Curvas Horizontal de Transição

## Comprimentos máximo e mínimo da Espiral de Transição

$$LC_{min} = 0,036 \cdot \frac{V^3}{R_c}$$

$LC_{min}$  = Comprimento mínimo de Transição (m)  
V = Velocidade Diretriz (km/h)  
 $R_c$  = Raio da Curva Circular (m)

$$LC_{máx} = \frac{R_c \cdot \Delta^0 \cdot \pi}{180^0}$$

$\Delta$  = Deflexão da tangente em graus  
 $R_c$  = Raio da Curva Circular (m)

# Curvas Horizontal de Transição

$$Lc = 3.Lc_{mín} \left\{ \begin{array}{l} Lc_{mín} = \text{Comprimento mínimo de Transição (m)} \\ Lc = \text{Comprimento de Transição a adotar (m)} \end{array} \right.$$

$$\theta_s = \frac{Lc}{2.R_c} \left\{ \begin{array}{l} Lc = \text{Comprimento de Transição a adotar (m)} \\ R_c = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ \theta_s = \text{Ângulo de transição (rad)} \end{array} \right.$$

$$Y_s = Lc \cdot \left( \frac{\theta_s}{3} - \frac{\theta_s^3}{42} \right) \left\{ \begin{array}{l} Lc = \text{Comprimento de Transição a adotar (m)} \\ Y_s = \text{Ordenada dos pontos SC e CS (m)} \\ \theta_s = \text{Ângulo de transição (rad)} \end{array} \right.$$

$$X_s = Lc \cdot \left( 1 - \frac{\theta_s^2}{10} + \frac{\theta_s^4}{216} \right) \left\{ \begin{array}{l} Lc = \text{Comprimento de Transição a adotar (m)} \\ X_s = \text{Abscissa dos pontos SC e CS (m)} \\ \theta_s = \text{Ângulo de transição (rad)} \end{array} \right.$$

# Curvas Horizontal de Transição

$$\phi = \Delta - 2 \cdot \theta_s \left\{ \begin{array}{l} \phi = \text{Ângulo central do trecho circular (rad)} \\ \Delta = \text{Deflexão da tangente (rad)} \\ \theta_s = \text{Ângulo de transição (rad)} \end{array} \right.$$

$$D = R_c \cdot \phi \left\{ \begin{array}{l} D = \text{Desenvolvimento do Trecho Circular (m)} \\ R_c = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ \phi = \text{Ângulo central do trecho circular (rad)} \end{array} \right.$$

$$k = X_s - R_c \cdot \text{sen} \left( \theta_s \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right) \left\{ \begin{array}{l} R_c = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ X_s = \text{Abscissa dos pontos SC e CS (m)} \\ \theta_s = \text{Ângulo de transição (rad)} \\ K = \text{Abscissa do centro O' (m)} \end{array} \right.$$

$$p = Y_s - R_c \cdot \left[ 1 - \text{cos} \left( \theta_s \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} R_c = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ Y_s = \text{Ordenada dos pontos SC e CS (m)} \\ \theta_s = \text{Ângulo de transição (rad)} \\ P = \text{Afastamento da curva circular (m)} \end{array} \right.$$

# Curvas Horizontal de Transição

$$TT = k + (R_c + p) \cdot \tan \left( \frac{\Delta}{2} \right)$$

$\left\{ \begin{array}{l} TT = \text{Tangente Total (m)} \\ R_c = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ \Delta = \text{Deflexão da tangente (graus)} \\ P = \text{Afastamento da curva circular (m)} \end{array} \right.$

$$E = \frac{R_c + p}{\cos \left( \frac{\Delta}{2} \right)} - R_c$$

$\left\{ \begin{array}{l} E = \text{Distância do PI a Circular da Curva (m)} \\ R_c = \text{Raio da Curva Circular (m)} \\ \Delta = \text{Deflexão da tangente (graus)} \\ P = \text{Afastamento da curva circular (m)} \end{array} \right.$